METEO-FRANCE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1998
D'ELEVE-INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

-:-:-:-:-:-

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I)

Durée : 3 heures **Coefficient : 6**

-:-:-:-:-:-

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

K désignant un corps qui, dans ce problème, sera toujours soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ l'espace vectoriel des matrices de type (p,q) (c'est-à-dire à p lignes et q colonnes) à coefficients dans K. Dans le cas particulier où $q = p$, le produit matriciel fait de $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ une algèbre non commutative que l'on notera $\mathcal{M}_p(K)$.

En associant à toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{p,q}(K)$, de coefficients a_{ij}, le nombre $\|A\| = \sup_{i,j} |a_{ij}|$ on fait de cet espace un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé dans lequel une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy. B_n désignant le terme général d'une série de matrices appartenant à cet espace de Banach, on démontre que la convergence de la série numérique de terme général $\|B_n\|$ entraîne celle de la série matricielle. On dit alors que cette dernière est absolument convergente.

Si B est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$) et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle (resp. complexe), la série de terme général $a_n B^n$ (avec par convention $B^\circ = I$, matrice unité) est appelée série entière matricielle.

- I -

1) a) Donner le rayon de convergence et la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{où } x \text{ appartient à } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

T. S. V. P. →

b) Calculer alors les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,x^{2n}$$

2) On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice D définie par :

$$D=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer son polynôme caractéristique.

b) Calculer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de D et D^2.

c) En déduire que tout polynôme matriciel :

$$P_n(D)=\sum_{k=0}^{n} a_k D^k \text{ (avec par convention } D^\circ = I\text{)}, \quad \text{où } \forall\, k \in \{0, \ldots, n\}\ a_k \in \mathbb{R},$$

appartient au sous-espace vectoriel $\mathcal{E}_3$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, D, D^2).

3) a) Montrer alors, en utilisant les résultats du 1), que la série géométrique matricielle de raison D est convergente, sa somme $G(D)=\sum_{n=0}^{+\infty} D^n$ appartenant à $\mathcal{E}_3$. Donner les composantes de $G(D)$ dans la base (I, D, D^2).

b) Toujours à partir des résultats du 1), établir la convergence de la série de terme général $(n+1)\,D^n$, et calculer les composantes de sa somme $\Gamma(D)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)D^n$ dans la base (I, D, D^2).

4) On se propose d'étudier maintenant le cas plus général où D est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, dont les coefficients d_{ij} appartiennent à $\mathbb{R}^+$. On pose, pour tout i :

$$\sum_{n=1}^{p} d_{in} = s_i(D)$$

puis $$\sup_{i\in\{1,\ldots,p\}} s_i(D) = s(D)$$

a) Vérifier que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\|D^n\right\| \le \left(s(D)\right)^n$$

b) Dans ce qui suit, on suppose que $s(D) < 1$. Montrer alors que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, la série matricielle de terme général $n^\alpha\, D^n$ est convergente.

T. S. V. P. ➔

c) Soit $G(D)$ la somme de la série de terme général D^n :

$$G(D) = \sum_{n=0}^{+\infty} D^n .$$

Calculer $(I - D)\, G(D)$. En déduire que $(I - D)$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide de $G(D)$.

d) On pose : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) D^n = \Gamma(D)$. Calculer $(I - D)\, \Gamma(D)$. En déduire l'expression de $\Gamma(D)$.

e) Comparer les expressions générales de $G(D)$ et $\Gamma(D)$ à celles obtenues dans le cas particulier étudié au 3).

- II -

1) Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|B^n\| \leq p^{n-1} \|B\|^n$$

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{B^n}{n!}$ est absolument convergente, sa somme étant appelée l'exponentielle de B et notée e^B :

$$e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}$$

2) Soit $\mathcal{F}_p$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ engendré par la famille (I, U), où I est la matrice unité, et U la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Si M et M' sont deux éléments de $\mathcal{F}_p$ tels que :

$$M = xI + yU \quad \text{et} \quad M' = x'I + y'U,$$

montrer que $\mathcal{F}_p$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les composantes de M^n dans la base (I, U).

4) Vérifier alors que e^M appartient à $\mathcal{F}_p$, et expliciter cette matrice en fonction de I et U.

5) a et b étant deux réels donnés vérifiant les relations :

$$a \geq 0,\ b > 0,\ a + (p - 1)b = 1 ;$$

soit, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, la matrice A dont les coefficients de la diagonale principale sont égaux à a et les autres tous égaux à b. Calculer la matrice e^{tA}, pour tout t réel, ainsi que la limite $\lim_{t \to +\infty} e^{-t} e^{tA}$.

T. S. V. P. ➔

Soit S_p l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients a_{ij} sont positifs ou nuls, avec, pour tout $i \in \{1,..., p\}$:

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = 1$$

1) Montrer que S_p est stable pour le produit matriciel.

Dans la suite de cette partie, toute matrice A de S_p est considérée comme la matrice d'un endomorphisme Φ de $\mathbf{C}^P$. Tout vecteur X de $\mathbf{C}^P$:

$$X = (x_1, ..., x_i, ..., x_p)$$

peut être représenté par la matrice :

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C}).$$

Si la norme sur $\mathbf{C}^P$ est définie par : $\|X\| = \sup_i |x_i|$, la norme de X dans $\mathbf{C}^P$ est égale à la norme de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C})$.

2) Montrer que $\lambda = 1$ est valeur propre de Φ, et trouver une droite vectorielle propre associée à cette valeur propre.

3) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de Φ et $X = (x_1, ..., x_i, ..., x_p)$ un vecteur propre associé à λ.

a) Soit un entier m tel que $|x_m| = \|X\|$. Démontrer que :

$$|\lambda| . |x_m| \leq |x_m|$$

Qu'en déduire, concernant les valeurs propres de Φ ?

b) Démontrer que : $|\lambda - a_{mm}| \leq 1 - a_{mm}$.

Qu'en déduire, concernant l'image de λ dans le plan représentatif du corps des complexes, rapporté à un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy ?

4) Dans la suite de cette partie, on considère que A a tous ses coefficients a_{ij} strictement positifs et que p est un entier supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de Φ différente de 1, alors on a $|\lambda| < 1$.

b) Soit $V = (v_1, \ldots\ldots, v_i, \ldots\ldots, v_p)$ un vecteur propre normé de Φ associé à la valeur propre 1 ; on peut le supposer de norme unité et tel que l'un de ses coefficients, v_m, soit égal à 1. Vérifier que $\sum_{j=1}^{p} a_{mj}(1 - v_j) = 0$.

c) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel propre de Φ associé à la valeur propre 1.

5) On pose : $\inf_{i,j} a_{ij} = \varepsilon$.

a) Vérifier que : $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

b) On considère, dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ la suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, où :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ \vdots \\ x_i(n) \\ \vdots \\ x_p(n) \end{pmatrix},$$

définie par la donnée de X_0, à coefficients positifs ou nuls, et la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbf{N} \qquad X_{n+1} = A\, X_n$

On pose : $\sup_i x_i(n) = M_n \quad ; \quad \inf_i x_i(n) = m_n$

Prouver que $\forall n \in \mathbf{N} \quad m_{n+1} \geq m_n + (M_n - m_n)\varepsilon$

et $\quad M_{n+1} \leq M_n - (M_n - m_n)\varepsilon$

c) En déduire que la suite $\left(X_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, vers une matrice unicolonne X dont tous les coefficients sont égaux.

d) Montrer alors que la suite $\left(A^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ vers une matrice $H \in \mathcal{S}_p$ dont toutes les lignes sont égales.

6) Dans le cas particulier où A est symétrique :

a) Vérifier que : $\lim_{n\to+\infty} A^n = \frac{1}{p}U$ où U est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie dans la question II)2).

b) $A \in \mathcal{S}_p$ étant à coefficients strictement positifs, et H désignant la limite de la suite $\left(A^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, déterminer la limite, lorsque t tend vers $+\infty$, de $e^{-t}e^{tA}$.